CH7 DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

EX 35 :

Notons respectivement r et r' les restes modulo 8 de a et b

Les valeurs possibles de rr' sont consignées dans le tableau ci-dessous.

$a.b\equiv -2(8)\Leftrightarrow a.b\equiv 6(8)\Leftrightarrow r.r'\equiv 6(8)$

On conclut de ce tableau que :

\r / r'	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	0	3	6	1	4	7	2	5
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	6	3
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	0	7	6	5	4	3	2	1

$a.b\equiv -2(8)$ ssi

$a\equiv 1(8)$ et $b\equiv 6(8)$ ou
$a\equiv 2(8)$ et $b\equiv 3(8)$ ou $a\equiv 2(8)$ et $b\equiv 7(8)$ ou
$a\equiv 3(8)$ et $b\equiv 2(8)$ ou
$a\equiv 5(8)$ et $b\equiv 6(8)$ ou
$a\equiv 6(8)$ et $b\equiv 1(8)$ ou $a\equiv 6(8)$ et $b\equiv 5(8)$ ou
$a\equiv 7(8)$ et $b\equiv 2(8)$

EX 36 : a/

Reste modulo 7 de x	0	1	2	3	4	5	6
Reste modulo 7 de x^2+6x+5	5	5	0	4	3	4	0

$S_{\mathbb{Z}}=\{7k+2\ ;k\in\mathbb{Z}\}\cup\{7k+6\ ;k\in\mathbb{Z}\}$

b/

Reste modulo 8 de x	0	1	2	3	4	5	6	7
Reste modulo 8 de x^2-4x+3	3	0	7	0	3	0	7	0

$S_{\mathbb{Z}}=\{8k+1\ ;k\in\mathbb{Z}\}\cup\{8k+3\ ;k\in\mathbb{Z}\}\cup\{8k+5\ ;k\in\mathbb{Z}\}\cup\{8k+7;k\in\mathbb{Z}\}$

EX 37 :

1. $10\equiv -1(11)\Rightarrow 10^{20}\equiv(-1)^{20}(11)\Rightarrow 10^{20}\equiv 1(11)$
2. $9999999999999999995=10^{20}-5\equiv 1-5(11)$ Donc le reste modulo 11 de $\equiv 7(11)$ 9999999999999999995 est 7

EX38 :

$10^{102}\equiv 1(103)$ (th de Fermat) Alors
$10^{204}=(10^{102})^2\equiv 1(103)$ et $10^{612}=(10^{102})^6\equiv 1(103)$ Donc
$10^{102}+3.\ 10^{204}\ 106.10^{612}\equiv 1+3+106\ (103)$ Donc le reste modulo 103 de $10^{102}+3.\ 10^{204}\ 106.10^{612}$ est 7

EX 39 :

1. • si 5 divise x alors $x\equiv 0(5)\Rightarrow x.(x^4-1)\equiv 0(5)$
   • si 5 ne divise pas x alors (d'après Fermat) $x^4\equiv 1(5)\Rightarrow x.(x^4-1)\equiv 0(5)$

   Donc pour tout entier naturel x on a : $x.(x^4-1)\equiv 0(5)$

   $(x^4-x^2).(x^2+1)=x^2.(x^2-1).(x^2+1)=x.[x.(x^4-1)]\equiv 0(5)$
2. de même que 1. $(x^8-x^5)(x^3+1)=x^4.[x.(x^6-1)]$

Qarray.tn - Aqra Bech Qarray.tn